MATEMÁTICA

01. Habitualmente, dois supermercados A e B vendem garrafas de certa marca de vinho por **p** reais a unidade. Em determinada semana, o supermercado A anunciou uma promoção para o referido produto: leve três unidades e pague por duas.

Em contrapartida, o supermercado B anunciou um desconto de 20% sobre o preço **p** em cada unidade comprada.

Se Sandoval comprar três garrafas escolhendo a melhor opção de pagamento, ele terá feito uma economia em relação à pior opção de, aproximadamente:

a) 18,7%
b) 16,7%
c) 19,7%
d) 17,7%
e) 15,7%

Resolução:

Do enunciado, temos que o valor para três garrafas é

no supermercado **A**: **2p** reais;

no supermercado **B**: $(1 - 0{,}2) \cdot p \cdot 3 = \mathbf{2{,}4p}$ reais.

Como Sandoval escolheu a melhor opção de pagamento, comprou no supermercado **A**.

Chamando de **i** a economia feita por Sandoval, temos:

$2{,}4 \cdot p \cdot (1 - i) = 2p$

$2{,}4 \cdot (1 - i) = 2$

$2{,}4 - 2{,}4i = 2$

$2{,}4i = 0{,}4$

$$i = \frac{0{,}4}{2{,}4}$$

$$i = \frac{4}{24}$$

$$i = \frac{1}{6} \cdot 100\%$$

$\mathbf{i \cong 16{,}7\%}$

A economia feita por Sandoval será de 16,7%.

Alternativa B

02. Nos quatro trimestres de 2016 e no primeiro trimestre de 2017, a receita trimestral de uma empresa manteve-se inalterada. Supondo que no segundo trimestre ela ainda permaneça inalterada e, em cada um dos dois últimos trimestres de 2017, haja um crescimento da receita de 10% em relação à receita do trimestre anterior, podemos afirmar que a receita de 2017 será superior à de 2016 em:

a) 6,65%
b) 8,35%
c) 5,25%
d) 7,75%
e) 5,85%

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2016: } x \\ 2^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2016: } x \\ 3^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2016: } x \\ 4^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2016: } x \end{array}\right\} 4x$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2017: } x \\ 2^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2017: } x \\ 3^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2017: } x\,(1 + 0{,}1) = 1{,}1x \\ 4^{\underline{o}} \text{ trimestre de 2017: } 1{,}1x \cdot (1 + 0{,}1) = 1{,}21x \end{array}\right\} 4{,}31x$$

Portanto, o aumento foi de:

$4x \cdot (1 + i) = 4{,}31x \Rightarrow i = 0{,}0775 = \mathbf{7{,}75\%}$

A receita de 2017 será superior à de 2016 em 7,75%

Alternativa D

03. Quando uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ possui uma matriz inversa,

ela é dada por $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

em que det (M) é o determinante da matriz **M**.

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

a matriz X que satisfaz a equação matricial A . X . B = C tem como soma de seus elementos o valor:

a) 16
b) 14
c) 18
d) 12
e) 20

Resolução:

Na equação matricial dada, temos A . X . B = C

$$\underbrace{A^{-1} . A}_{I} . X . \underbrace{B . B^{-1}}_{I} = A^{-1}\,C\,B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} . C . B^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Substituindo A^{-1} e B^{-1} em $X = A^{-1}\,C\,B^{-1}$ obtemos:

$$X = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}} . \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -10 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -42 \\ -28 & 74 \end{bmatrix}$$

que resulta em $16 - 42 - 28 + 74 = \mathbf{20}$

A matriz X que satisfaz a equação matricial A . X . B = C tem como soma de seus elementos o valor 20.

Alternativa E

04. Uma empresa produz **x** toneladas mensais de um produto a um custo mensal dado (em milhares de reais) por $C(x) = 0{,}75\,x^2 + 4x + 40$.

A capacidade máxima de produção é de 20 toneladas por mês e toda a produção é vendida a um preço de 25 (milhares de reais) por tonelada.

A quantidade em toneladas que deve ser produzida e vendida por mês para maximizar o lucro mensal é:

a) 12
b) 18
c) 14
d) 20
e) 16

Resolução:

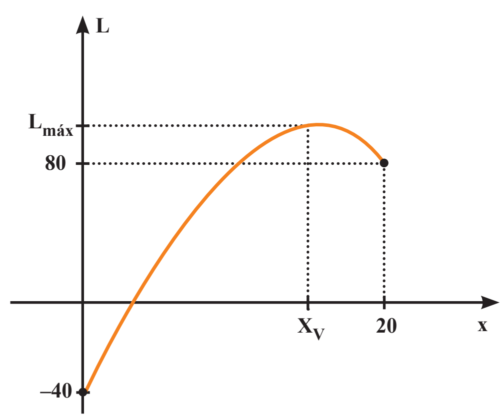
Chamando de L (x) o lucro mensal e de R(x) a receita mensal, do enunciado obtemos:

$L(x) = R(x) - C(x)$

$L(x) = 25 . x - 0{,}75\,x^2 - 4x - 40,\quad \text{para } 0 \leq x \leq 20$

$L(x) = -0{,}75\,x^2 + 21x - 40,\quad \text{para } 0 \leq x \leq 20$

O gráfico da função acima é:



Assim, a quantidade de toneladas que deve ser produzida e vendida por mês para maximizar o lucro mensal é:

$$x = x_v = \frac{-21}{2 . (-0{,}75)} \Rightarrow \mathbf{x = 14}$$

A quantidade que deve ser produzida e vendida por mês para maximizar o lucro mensal é 14 toneladas.

Alternativa C

05. Um polinômio P(x) tem coeficientes reais, grau 4 e coeficiente do termo de maior expoente igual a 1; o polinômio admite 1 como raiz dupla e admite a raiz imaginária 2i.

O resto da divisão deste polinômio por x + 1 é:

a) 27
b) 10
c) 20
d) 25
e) 15

Resolução:

Como P (x) admite **1** como raiz dupla, um de seus fatores é $(x-1)\,.\,(x-1) = \mathbf{(x-1)^2}$.

Como P (x) admite **2i** como raiz e tem coeficientes reais, admite seu conjugado **– 2i** como raiz também e, assim, outro fator de P (x) é $(x + 2i)\,.\,(x - 2i) = \mathbf{x^2 + 4}$.

Logo $P(x) = 1\,.\,(x-1)^2\,.\,(x^2+4)$ e o resto na divisão por $x + 1$ é $P(-1) = (-1-1)^2\,.\,[(-1)^2 + 4] = \mathbf{20}$.

O resto da divisão deste polinômio por x + 1 é 20.

Alternativa C

06. Sabendo que **x** pertence ao segundo quadrante e que

$\text{sen } x = \dfrac{1}{4}$,

podemos afirmar que sen 2x + cos 2x é igual a:

a) $\dfrac{5-\sqrt{15}}{4}$

b) $\dfrac{7+\sqrt{15}}{8}$

c) 0

d) $\dfrac{7-\sqrt{15}}{8}$

e) $\dfrac{5+\sqrt{15}}{4}$

Resolução:

Pela Relação Fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{15}{16}$

$\Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Como $\cos x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ não convém $\left(\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right)$

temos:

$$\text{sen } 2x + \cos 2x = 2\,.\,\text{sen } x\,.\,\cos x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

$$\text{sen } 2x + \cos 2x = 2\,.\,\frac{1}{4}\,.\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \frac{15}{16} - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\text{sen } 2x + \cos 2x = -\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{14}{16}$$

$$\mathbf{sen\ 2x + cos\ 2x = \frac{7-\sqrt{15}}{8}}$$

Alternativa D

07. Em 2016, uma empresa teve um faturamento de 250 milhões de reais. A diretoria propôs, para os anos de 2017 a 2030, uma meta de aumento de faturamento em cada ano de 30 milhões, em relação ao faturamento do ano anterior.

Se a meta for atingida, qual o total do faturamento de 2016 a 2030 (inclusive 2016 e 2030)?

a) 6,99 bilhões de reais.
b) 6,93 bilhões de reais.
c) 6,87 bilhões de reais.
d) 6,90 bilhões de reais.
e) 6,96 bilhões de reais.

Resolução:

De acordo com o enunciado, os faturamentos da empresa de 2016 a 2030 são os 30 – 16 + 1 = 15 termos da PA: $(250, 280, 310, ..., a_{15})$.

Sabendo que $a_{15} = 250 + 14 \,.\, 30 = 670$,

o total do faturamento nesses 15 anos é dado por

$$\frac{(250 + 670) \,.\, 15}{2} = 6900 \text{ milhões de reais,}$$

isto é, **6,9 bilhões de reais**.

O total faturado de 2016 a 2030 é 6,9 bilhões de reais.

Alternativa D

08. Um capital de R\$ 5 000,00 é aplicado a juros compostos à taxa de juro de 50% ao ano.

Simultaneamente, um outro capital de R\$ 500,00 também é aplicado a juros compostos à taxa de juro de 100% ao ano.

Depois de quanto tempo de aplicação os montantes serão iguais?

(Adote os valores: log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477)

a) 8 anos.
b) 6,8 anos.
c) 7,2 anos.
d) 6,4 anos.
e) 7,6 anos.

Resolução:

Para que os montantes sejam iguais, devemos ter:

$5000 \,.\, (1 + 0,5)^t = 500 \,.\, (1 + 1)^t$

$10 \,.\, 1,5^t = 2^t$

$\log 10 + t \log \left(\frac{3}{2}\right) = t \log 2$

$1 + t \,.\, (\log 3 - \log 2) = t \log 2$

Substituindo os valores, temos:

$1 + 0,176\, t = 0,301\, t$

$0,125\, t = 1 \Rightarrow$ **$t = 8$ anos**

Os montantes serão iguais depois de 8 anos de aplicação.

Alternativa A

09. Um capital de R$ 5 000,00 é aplicado a juros simples e taxa de juro de 2% ao mês. Cinco meses depois, outro capital de R$ 4 000,00 é aplicado também a juros simples à taxa de juro de 3,75% ao mês.

As aplicações são mantidas até que os montantes se igualem e isto ocorre após **n** meses da segunda aplicação.

Podemos afirmar que **n** é

a) maior que 35.
b) par.
c) divisível por 11.
d) primo.
e) múltiplo de 7.

Resolução:

C_1: capital de R$ 5.000,00
aplicado a juros simples e à taxa de 2% a.m.

C_2: capital de R$ 4.000,00
aplicado a juros simples e à taxa de 3,75% a.m.

Sabendo que que **C_2** foi aplicado 5 meses depois de **C_1**, queremos saber quando $C_2 = C_1$.

$C_2 = C_1 \Rightarrow 4000\,[1 + 3{,}75\% \,.\, n] = 5000\,[1 + 2\%\,(n + 5)]$

$\Rightarrow 4000 + 150n = 5000 + 100\,(n + 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4000 + 150n = 5500 + 100n \Rightarrow 50n = 1500 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 30$ meses

Portanto, **n é par**.

Alternativa B

10. Desenvolvendo-se a expressão $(x + 2)^{10}$, obtemos um polinômio

a) com 10 termos.
b) cuja soma dos coeficientes é 1 024.
c) cujo termo independente de **x** é 512.
d) de grau 11.
e) cujo termo em x^3 tem coeficiente 15 360.

Resolução:

Analisando-se as alternativas, temos que:

$(x + 2)^{10}$ possui 11 termos, pois resulta de um desenvolvimento binomial com expoente 10 (**A** falsa).

A soma dos coeficientes de $(x + 2)^{10}$ é obtida para x = 1, ou seja, é $(1 + 2)^{10} = 3^{10} \neq 1024$ (**B** falsa).

O termo independente de $(x + 2)^{10}$ é obtido para x = 0, ou seja, $(0 + 2)^{10} = 2^{10} = 1024$ (**C** falsa).

O grau do polinômio resultante do desenvolvimento de $(x + 2)^{10}$ é igual ao expoente, ou seja, 10 (**D** falsa).

Portanto, por exclusão, a alternativa correta é **E**.

De fato, é possível verificar que o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(x + 2)^{10}$ é $\binom{10}{3} \,.\, 2^7 = \mathbf{15\,360}$.

Alternativa E

11. Um programa de auditório apresenta, em um de seus segmentos, um quadro que permite ao participante ganhar um aparelho de TV.

O quadro tem as seguintes etapas:

1. Há quatro portas fechadas A, B, C e D, sendo que atrás de uma delas há uma TV, digamos a porta A. O participante não sabe onde está a TV.
2. O participante escolhe uma das quatro portas sem abri-la.
3. O apresentador do programa, que sabe onde está a TV, abre duas portas atrás das quais não se encontra a TV.
4. O apresentador dá ao participante a opção de ele permanecer com a porta já selecionada ou mudar para a outra porta ainda fechada.
5. Finalmente, a porta escolhida na etapa anterior é aberta; se atrás dela estiver a TV, o participante ganha o aparelho; caso contrário, não ganha nada.

Valdemar é um participante que adotou a seguinte estratégia:

na etapa 1, escolher ao acaso uma porta e,
na etapa 4, mudar de porta.

A probabilidade de Valdemar ganhar a TV é:

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{2}{3}$

Resolução:

Supondo que a TV esteja na porta A, temos dois casos:

1. Se Valdemar escolher a porta A, inicialmente o apresentador vai abrir duas portas que não contêm a TV. Digamos que as portas abertas sejam B e C.
   Assim, Valdemar vai posteriormente mudar sua escolha para a porta D e não vai ganhar a TV.
2. Se Valdemar escolher uma porta que não contenha a TV (digamos B), o apresentador abrirá as outras duas que não contêm a TV (C e D). Valdemar mudará sua escolha para a porta premiada (A) e assim ganhará a TV.

Concluímos que a probabilidade de Valdemar ganhar a TV equivale à probabilidade de ele escolher inicialmente uma porta que não contém o prêmio.

A probabilidade de Valdemar ganhar a TV é $\frac{3}{4}$.

Alternativa C

12. O ponto **P** do plano cartesiano tem as seguintes características:

— pertence ao 4º quadrante;
— pertence à reta de equação $4x + y = 1$;
— dista 5 do eixo das abscissas.

A distância de **P** à origem é igual a:

a) $\frac{\sqrt{109}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{117}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{113}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{115}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{111}}{2}$

Resolução:

Como o ponto **P** dista 5 do eixo das abscissas e está no 4º quadrante, substituimos $y = -5$ na reta.

Assim: $4x + (-5) = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Então, a distância do ponto $\left(\frac{3}{2}, -5\right)$ à origem é

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-5)^2} = \frac{\sqrt{109}}{2}$$

A distância do ponto P à origem é $\frac{\sqrt{109}}{2}$.

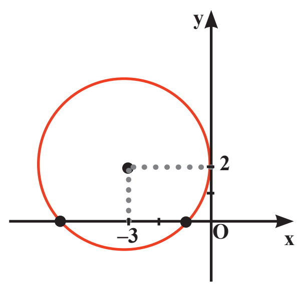
Alternativa A

13. No plano cartesiano, uma circunferência tem centro no ponto C (– 3, 2) e tangencia o eixo das ordenadas.

A circunferência intercepta o eixo das abscissas em dois pontos, cuja soma das abscissas é:

a) – 5,5
b) – 4,5
c) – 5
d) – 4
e) – 6

Resolução:



C (– 3, 2) e R = 3

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

Se y = 0 (intersecção com o eixo das abscissas), temos:

$(x + 3)^2 + (0 - 2)^2 = 9$

$(x + 3)^2 = 9 - 4$

$(x + 3)^2 = 5$

$x + 3 = \pm\sqrt{5} \begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{5} \\ x_2 = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$

A soma das abscissas é $x_1 + x_2 = -6$

Alternativa E

14. Dados em um plano um ponto **F** chamado foco e uma reta **d** chamada diretriz em que o ponto **F** não pertence à reta **d**, chamamos de parábola ao conjunto dos pontos desse plano que estão à mesma distância de **F** e da reta **d**.

O ponto P (3, m) do plano cartesiano pertence a uma parábola cujo foco é o ponto F (2, 4) e cuja diretriz é a reta de equação x = – 2 .

Os possíveis valores de **m** têm por soma o número:

a) 10
b) 8
c) 11
d) 9
e) 7

Resolução:

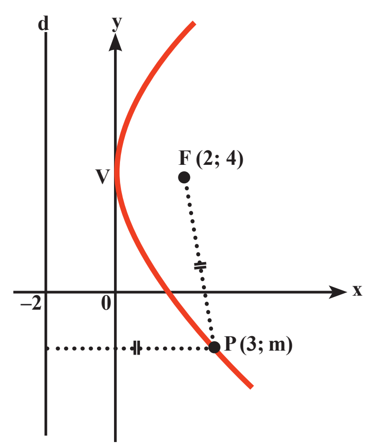
$d_{PF} = d_{Pd}$

$\sqrt{(3 - 2)^2 + (m - 4)^2} = 5$

$1 + m^2 - 8m + 16 = 25$

$m^2 - 8m - 8 = 0$

A soma dos possíveis valores de m é $\frac{-b}{a} = 8$



Alternativa B

15. A reta do feixe de paralelas $3x + 4y = c$ $(c \in \mathbb{R})$ que tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 6$ em um ponto do 1º quadrante intercepta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada:

a) $\dfrac{5\sqrt{6}}{4}$

b) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

c) $\dfrac{7\sqrt{6}}{4}$

d) $2\sqrt{6}$

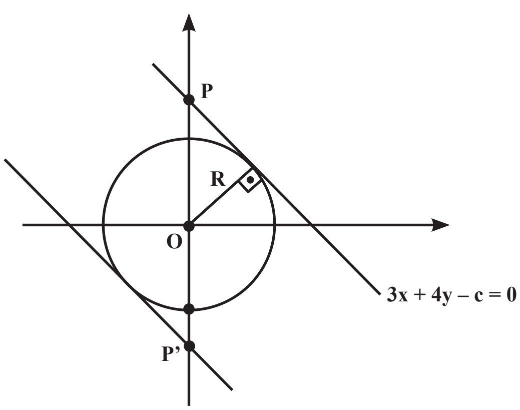
e) $\dfrac{9\sqrt{6}}{4}$

Resolução:

Temos que:

$3x + 4y - c = 0$ é tangente à circunferência dada por

$$x^2 + y^2 = 6 \begin{cases} C\ (0;\ 0) \\ R = \sqrt{6} \end{cases}$$



Temos que $d_{Or} = \sqrt{6}$

$$\frac{|\,3\,(0) + 4\,(0) - c\,|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{6} \Rightarrow |-c| = 5\sqrt{6} \begin{cases} c = 5\sqrt{6} \\ c = -5\sqrt{6} \end{cases}$$

Logo, $3x + 4y - 5\sqrt{6} = 0$ é a reta do 1º quadrante

sendo que quando $x = 0 \Rightarrow 4y = 5\sqrt{6} \Rightarrow$ $\mathbf{y = \dfrac{5\sqrt{6}}{4}}$

A reta intercepta o eixo das ordenadas no ponto $\mathbf{y = \dfrac{5\sqrt{6}}{4}}$
.

Alternativa A

COMENTÁRIO DO CPV

A Prova Objetiva de Matemática do vestibular FGV-ADM junho de 2017 seguiu a tendência das provas anteriores, com grande incidência de questões de Matemática Financeira, Logaritmos, Funções, PA e PG.

A novidade ficou por conta da ausência da Geometria Plana e da presença de questões de Binômio de Newton e Cônicas.

De maneira geral, a prova atendeu às expectativas e deverá selecionar bem seus candidatos.