FGV ADM – 04/junho/2017

MATEMÁTICA APLICADA

01. a) A Demonstre que, se escolhermos três números inteiros positivos quaisquer, sempre existirão dois deles cuja diferença é um número múltiplo de 2.

b) Considere um triângulo equilátero de área $\sqrt{3}\text{cm}^2$. Demonstre que, se tomarmos 5 pontos no interior do triângulo, sempre ocorrerá que ao menos dois desses pontos estarão a uma distância entre eles menor que 1cm.

Resolução:

a) Se tomarmos 3 números inteiros positivos, entre eles sempre haverá pelo menos dois números pares ou dois números ímpares. Assim, a diferença entre os dois pares ou os dois ímpares é sempre par.

b) $\text{Área}_{\text{TRIÂNGULO}} = \dfrac{B.h}{2}$ portanto $\sqrt{3}\text{cm}^2 = \dfrac{B.h}{2}$.

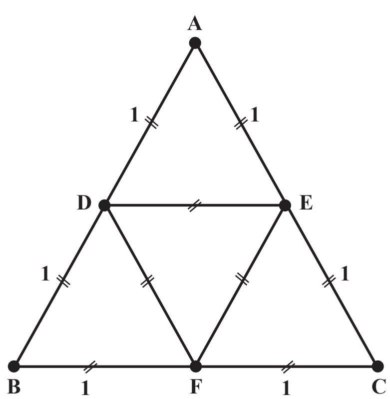
Como o triângulo é equilátero, podemos chamar a base e os outros lados de **L**. Substituindo na fórmula acima, temos:

$$\sqrt{3}\text{cm}^2 = \frac{L}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{L}{2} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto o lado **L** do triângulo equilátero **ABC** é

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L = 2\ cm}.$$

Dado o triângulo equilátero abaixo, com L = 2 cm**,** podemos dividi-lo em 4 triângulos equiláteros congruentes:



Assim, os 4 triângulos menores da figura têm lado 1 cm.

Agora vamos tentar colocar 4 pontos internos ao triângulo **ABC** de tal forma que **não** haja 2 deles com distância menor que 1 cm, isto é, 1 em cada triângulo menor.

Assim, o quinto ponto necessariamente estará em um triângulo já ocupado por outro ponto, ou seja, sempre haverá um triângulo menor com 2 pontos internos.

Como a maior distância entre 2 pontos nesse triângulo menor é a própria medida do lado igual a 1 cm, sempre ocorrerá que ao menos 2 pontos desses 5 pontos estarão a uma distância menor que 1 cm.

02. a) Demonstre que a média aritmética de todos os inteiros de 300 a 600, inclusive 300 e 600, é múltiplo da média aritmética de todos os inteiros de 50 a 100, inclusive 50 e 100.

b) O valor de $\dfrac{2^{-10} + 2^{-11} + 2^{-12} + 2^{-13}}{0{,}5}$

é quantas vezes o valor de 2^{-13}?

Resolução:

a) $S_A = \dfrac{300 + 301 + 302 + ... + 600}{301}$

$$\mathbf{S_A} = \frac{(300 + 600) \cdot \frac{301}{2}}{301} = \mathbf{450}$$

$$S_B = \frac{50 + 51 + 52 + ... + 100}{51}$$

$$\mathbf{S_B} = \frac{(50 + 100) \cdot \frac{51}{2}}{51} = \mathbf{75}$$

$S_A = 6\ S_B$ ou seja: $\mathbf{S_A}$ é múltiplo de $\mathbf{S_B}$.

b) Temos:

$$\frac{2^{-10} + 2^{-11} + 2^{-12} + 2^{-13}}{0{,}5} = \frac{2^{-13}\,(2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)}{2^{-1}} =$$

$$= 2^{-13} \cdot 15 \cdot 2 = \mathbf{30 \cdot 2^{-13}}$$

O valor pedido é **30 vezes o valor de 2^{-13}**.

03. A sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é tal que $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ para todo número natural $n \geq 3$.

Além disso, são conhecidos os termos $a_3 = 4$ e $a_5 = 8$.

a) Qual é o valor de a_6?

b) Qual é a soma dos cinco primeiros termos da sequência?

Resolução:

a) Temos que: $\begin{cases} a_3 = 4 \\ a_5 = 8 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \end{cases}$

Se $a_5 = \dfrac{a_4 + a_3}{2} \Rightarrow 8 = \dfrac{a_4 + 4}{2} \Rightarrow a_4 = 12$

e $a_6 = \dfrac{a_5 + a_4}{2} \Rightarrow a_6 = \dfrac{8 + 12}{2} \Rightarrow \mathbf{a_6 = 10}$

O valor de a_6 é 10.

b) Como $a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \Rightarrow a_1 + a_2 = 2a_3$

e $a_5 = \dfrac{a_3 + a_4}{2} \Rightarrow a_3 + a_4 = 2a_5$

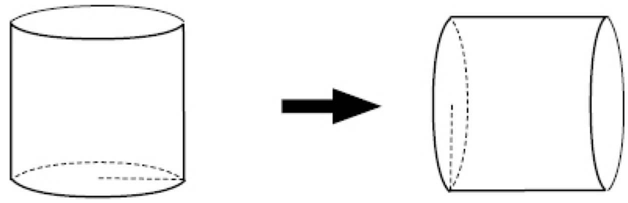
temos $S_5 = \underbrace{a_1 + a_2}_{2\,.\,a_3} + \underbrace{a_3 + a_4}_{2\,.\,a_5} + a_5$

$S_5 = 2\,.\,a_3 + 2\,.\,a_5 + a_5 \Rightarrow S_5 = 2\,.\,4 + 3\,.\,8 = \mathbf{32}$

$\mathbf{S_5 = 32}$

A soma dos cinco primeiros termos da sequência é 32.

04.



a) Um tanque cilíndrico fechado contém 54π m^3 de água e está cheio somente até metade da sua capacidade.

Quando o tanque é colocado no chão, apoiado na sua base circular, a altura da água no tanque é igual a 6m.

Quando o tanque é colocado no chão, apoiado no seu lado, qual é a altura, em metros, da superfície da água acima do chão?

b) Usando massa de modelar, uma garota molda três esferas de raios 1 cm, 2 cm e 4 cm. Em seguida, ela mistura as 3 esferas para construir uma única esfera.

Qual é o raio dessa última esfera?

Resolução:

a) Sendo 54π m^3 o volume de água no cilindro,

quando ele é apoiado sobre a base circular temos:

$V = \pi r^2\,.\,h = 54\pi$

$\pi r^2\,.\,6 = 54\pi$

$r^2 = 9$

$r = 3$m

Invertendo-se a posição, quando o cilindro é apoiado sobre seu lado (geratriz), a altura será exatamente o raio, ou seja, **h = 3m**.

b) Temos: $\dfrac{4}{3}\pi(1)^3 + \dfrac{4}{3}\pi(2)^3 + \dfrac{4}{3}\pi(4)^3 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

$1 + 8 + 64 = R^3 \Rightarrow \mathbf{R = \sqrt[3]{73}\ m}$

O raio dessa última esfera é $R = \sqrt[3]{73}$ m.

05. a) Se a receita de certa livraria, em janeiro, é $\frac{1}{10}$ da sua receita em fevereiro e sua receita, em março, é o quádruplo da sua receita em janeiro, então a receita da loja, em fevereiro, é quantas vezes a média aritmética das receitas de janeiro e março?

b) No texto a seguir, considere a divisão no conjunto dos números inteiros positivos, ou seja, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto são inteiros positivos.

Se **m** e **n** são dois inteiros positivos tais que $\frac{m}{n} = 60{,}15$, qual, dentre os números números 1, 2 e 3, poderia ser o resto quando dividimos **m** por **n**?

Resolução:

a) Pelo enunciado, temos:

$R_J = \frac{1}{10} R_F$

$R_M = 4\ R_J = \frac{4}{10} R_F$

Sendo $\overline{x}$ a média aritmética das receitas de janeiro e março, temos:

$$\overline{x} = \frac{R_J + R_M}{2} = \frac{\frac{1}{10} R_F + \frac{4}{10} R_F}{2} = \frac{5}{20} R_F = \frac{1}{4} R_F \Rightarrow$$

$\mathbf{R_F = 4\overline{x}}$

A receita em fevereiro será 4 vezes a média.

b) Na divisão dos números inteiros, utilizando o método das chaves, temos:

$$\begin{array}{l|l} m & n \\ \hline x & 60 \end{array} \Rightarrow m = 60n + x$$

Como m = 60,15 n, temos

$60{,}15n = 60n + x \Rightarrow \mathbf{x = 0{,}15n}$.

Entre os valores 1, 2 e 3, o único que pode ser x é 3, pois é múltiplo inteiro de 0,15.

06. Que relações deverão existir entre os números reais **m**, **n**, ℓ e **k** para que os sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \\ 2x + y + z = \ell \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \\ x - 4y + 5z = k \end{cases}$$

sejam equivalentes, isto é, sejam possíveis e tenham as mesmas soluções?

Resolução:

Temos:

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \\ 2x + y + z = \ell \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = m \\ 0x + 3y - 3z = n - m \\ 0x + 3y + 3z = \ell - 2m \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ 0x + 3y - 3z = n - m \\ \mathbf{0x + 3y + 3z = \ell - 2m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \\ x - 4y + 5z = \ell \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = m \\ 0x + 3y - 3z = m - n \\ 0x + 3y - 3z = m - k \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ 0x - 3y + 3z = m - n \\ \mathbf{0x + 0y + 0z = 2m - n - k} \end{cases}$$

Para que os sistemas sejam equivalentes, temos $\mathbf{m + n - \ell = 0}$ e $\mathbf{2m - n - k = 0}$.

07. a) Se **n** é um inteiro positivo e o produto de todos os inteiros de 1 a **n**, inclusive 1 e **n**, é divisível por 660, qual é o menor valor possível de **n**?

b) Sabendo que $\frac{x+y}{z} > 0$, $x < y$ e $z < 0$,

é correto afirmar que $x < 0$? Justifique sua resposta.

Resolução:

a) O produto de todos os inteiros de **1** a **n**, inclusive **1** e **n**, é representado por **n!**.

Como ele é divisível por $660\ (= 2\,.\,2\,.\,3\,.\,5\,.\,11)$, temos:

$$\frac{n!}{660} = \frac{n!}{2\,.\,2\,.\,3\,.\,5\,.\,11}$$

Assim, **o menor valor possível de n é 11**.

b) $\begin{cases} \frac{x+y}{z} > 0 \\ x < y \\ z < 0 \end{cases}$

Como $z < 0$ e $\frac{x+y}{z} > 0$, temos $x + y < 0$.

Como $x + y < 0$ e $x - y < 0$, temos $2x < 0$ e

portanto $\mathbf{x < 0}$.

08. a) Cada uma das letras na tabela a seguir representa um dos números 1, 2 ou 3. Cada um desses números aparece exatamente uma vez em cada linha e exatamente uma vez em cada coluna. Se n + t = 6, qual é o valor de x?

x	y	z
m	n	p
r	s	t

b) Leia e interprete com atenção o texto de lógica a seguir. Em seguida, escreva a resposta da questão.
Não há necessidade de nenhuma justificação.
João e Maria vagavam pela floresta procurando o caminho de casa. Em uma encruzilhada, encontram o guarda do ogro: um caminho levava para casa, o outro para a mesa do ogro e não como convidado! Por ordem do ogro, cada viajante podia fazer uma única pergunta ao guarda. E eles sabiam que o guarda mentia e dizia a verdade alternadamente. Se dizia a verdade uma vez, na vez seguinte mentia; se mentia uma vez, na vez seguinte dizia a verdade. João e Maria foram até o guarda, um de cada vez. João foi o primeiro. Maria ouviu João perguntar qual é o caminho que leva para casa, mas não ouviu a resposta do guarda, nem viu o caminho que João seguiu.
Questão: Que pergunta Maria formulou ao guarda para ter certeza de escolher o caminho correto que leva para casa?

Resolução:

a) De acordo com o enunciado, se $n + t = 6 \Rightarrow n = t = 3$.

Assim, podemos ter:

caso 1

x = 3	y = 1	z = 2
m = 2	n = 3	p = 1
r = 1	s = 2	t = 3

ou

caso 2

x = 3	y = 2	z = 1
m = 1	n = 3	p = 2
r = 2	s = 1	t = 3

Logo: **x = 3**

b) Sendo: C: o caminho de casa
M: o caminho para mesa do Ogro

se Maria perguntar "Qual o caminho João seguiu?" temos:

Pergunta

I. João: Qual caminho para casa?
Resposta: M (guarda mente)

Maria: Qual caminho João seguiu?
Resposta: M (guarda diz a verdade)

II. João: Qual caminho para casa?
Resposta: C (guarda diz a verdade)

Maria: Qual caminho João seguiu?
Resposta: M (guarda mente)

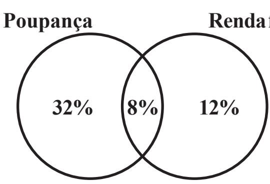
Maria deve fazer a pergunta "Qual caminho João seguiu" e seguir pelo caminho contrário ao da resposta.

09\. a) Em um grupo de 5.000 pessoas, 40% investem em poupança, 20% investem em renda fixa e 8% investem em ambas, poupança e renda fixa. Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente do grupo de 5 000 pessoas, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de a pessoa escolhida ser uma que investe em poupança mas não em renda fixa?

b) Um time de futebol formou uma comissão de 10 membros, incluindo Hélio, para escolher um presidente, um diretor de futebol e um diretor de patrimônio. Uma pessoa da comissão vai ser escolhida ao acaso, por sorteio, para ser o presidente; uma das nove restantes vai ser escolhida ao acaso para ser o diretor de futebol, e uma das oito restantes vai ser escolhida ao acaso para ser o diretor de patrimônio. Qual é a probabilidade de Hélio ser o membro escolhido para ser diretor de futebol ou o membro escolhido para ser o diretor de patrimônio?

Resolução:

a)



A probabilidade de a pessoa escolhida investir em poupança mas não em renda fixa é 32%.

b)

P	DF	DP	ou	P	DF	DP
____	H	____		____	____	H

$$\left.\begin{array}{l} P\,(\text{H ser DF}) = \dfrac{A_{9,2}}{A_{10,3}} = \dfrac{1}{10} \\[2ex] P\,(\text{H ser DP}) = \dfrac{A_{9,2}}{A_{10,3}} = \dfrac{1}{10} \end{array}\right\rangle\ P\,(\text{H ser DF ou H ser DP}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

A probabilidade de Hélio ser Diretor de Futebol ou Diretor Patrimônio é $\mathbf{\frac{1}{5}}$ ou 20%.

10\. Uma construtora vende três apartamentos cuja média aritmética dos preços é igual a R$ 170.000,00. Considerando os três preços, existe uma única moda que não é o preço maior. O preço maior excede em R$ 30.000,00 a soma dos preços dos outros dois apartamentos. Determine a moda e a mediana dos preços dos três apartamentos.

Resolução:

Chamando de **x**, **x** e **y** os preços dos 3 apartamentos em que **x** é a moda e **x < y**, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x + x + y}{3} = 170.000 \\ y = 2x + 30.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 510.000 \\ -2x + y = 30.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120.000 \\ y = 270.000 \end{cases}$$

A moda e a mediana são iguais a R$ 120.000,00.

COMENTÁRIO DO CPV

A Prova Discursiva de Matemática do vestibular FGV-ADM junho 2017 mostrou características diferenciadas em relação aos exames anteriores, propondo questões não convencionais que solicitavam demonstrações e com profundidade conceitual elevada, exigindo alto nível de conhecimento dos candidatos.